第 14 卷 无锡轻工大学学报 Vol. 14
第 3 期 JOURNAL OF WUXI UNIVERSITY OF LIGHT INDUSTRY 1995 No. 3

一类重特征方程广义混合问题的研究

蔡日增

(基础课部)

摘要 讨论了重特征方程 $L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0$ 的广义混合问题，即在曲线 $t = \mu(x)$ 上给出初始条件。文中证明了对一切实数 p，广义混合问题的解都是存在唯一的。

主题词 重特征方程；广义混合问题；离散现象

中图分类号 O175.27

0 引 言

关于重特征方程，人们对它的认识还不是很深刻的，文献[1]中，F・Treves 研究了一个简单的方程：

$$L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0$$

的始值问题，其中 p 为常数，$t = 0$ 为始值的支柱，在上半平面 $t > 0$ 求解。对这个问题，Treves 发现了所谓的离散现象，即当 $p = 1,3,5,\cdots$ 这些离散数值时，问题没有唯一性，但除了这些离散的数值外，对任意的 p 值问题的解都是存在唯一。文献[2]讨论了 Treves 方程 Cauchy 问题和 Gaursat 问题，发现在解的存在性中有离散现象，且离散值仍为 $p = 1,3,5,\cdots$，文献[3]，[4]中证明了第一类及第二类混合问题中存在离散现象。我们的兴趣是研究 Treves 方程的第三类边界条件，且始值的支柱为曲线 $t = \mu(x)$ 的混合问题，称之为广义混合问题

$$\begin{cases} L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0, & x \geqslant 0, t \geqslant \mu(x) \\ u(x,\mu(x)) = \varphi_1(x), & x \geqslant 0 \\ u_t(x,\mu(x)) = \varphi_2(x), & x \geqslant 0 \\ u_x(0,t) - \sigma u(0,t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 p 为任意实数，$\sigma > 0$，当 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 及 $\mu(x)$ 满足一定条件时，我们证明了定解问题解的存在性和唯一性中并无离散现象。由此可见，离散现象不仅和方程有关而且与问题的提法有关。

收稿日期：1994-05-12

本文的主要结果：

定理 设$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\mu(x)\in C^\infty(R_1)$，且$x=0$是它们的无穷阶零点，$\sigma>0$，$0\leqslant\mu(x)\leqslant\frac{1}{2}x^2$，$|\mu'(x)|<|x|$，则对任意实数$p$，定解问题(1)存在唯一解$u(x,t)\in C^\infty(\Omega)$，其中$\Omega=\{(x,t)\in R^2|x\geqslant 0,t\geqslant\mu(x)\}$.

1 基本引理

本节假定定理的条件成立。仿照文献[1]，本文采用记号

$$X=\partial_x-x\partial_t,\qquad Y=\partial_x-x\partial_t$$

于是算子L_p可以写成 $L_p=YX+(p-1)\partial_t$ 或 $L_p=XY+(p+1)\partial_t$

并易得关系式 $XL_p=Y_{p-2}X$， $L_pY=YL_{p-2}$

又记

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x))$$

$$(A_p\varphi)(x)=(Xu,(Xu)_t)_{t=\mu(x)}$$

$$=\left(\varphi'_1(x)+(x-\mu'(x))\varphi_2(x),\frac{1}{x+\mu'}(x-\mu')\varphi'_2+(p-\mu'')\varphi_2+\varphi''_1\right)$$

由直接验证可得下列引理。

引理1 若$p\neq 1,3$，函数$u(x,t)$是问题

$$\begin{cases}L_{p-4}u=0,x\geqslant 0,t\geqslant\mu(x)\\ u(x,\mu(x))=\psi_1(x)\equiv(R_{p-2}\varphi)_1(x)\\ u_t(x,\mu(x))=\psi_2(x)\equiv(R_{p-2}\varphi)_2(x)\\ u_x(0,t)-\sigma\dfrac{p-3}{p-1}u(0,t)=0\end{cases}\tag{2}$$

的解，则$v(x,t)=Y^2u(x,t)$是问题(1)的解，其中

$$\begin{aligned}\psi_1(x)=&\frac{1}{(p-1)(p-3)}\int_0^x(x-\xi)\{(p-1)(p-4-\mu''(\xi))\varphi_1(\xi)\\&+2[(3-p)\mu'(\xi)+(4-p+\mu''(\xi))]\varphi'_1(\xi)+2\xi(\xi+\mu'(\xi))\varphi''_1(\xi)\\&+[(9-p)\xi^2-4\xi\mu'(\xi)\mu''(\xi)+(p-5)\mu'^2(\xi)]\varphi_2(\xi)\\&+2\xi(\xi^2-\mu'^2(\xi))\varphi'_2(\xi)\}d\xi\equiv(R_{p-2}\varphi)_1(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(x)=&\frac{1}{(p-1)(p-3)}[(1-p)\varphi_1(x)+2x\varphi'_1(x)+2x(x-\mu'(x))\varphi'_2(x)]\\&\equiv(R_{p-2}\varphi)_2(x)\end{aligned}$$

引理2 若$p\neq 1,3,5,7$，函数$u(x,t)$是问题

$$\begin{cases}L_{p-8}u=0,x\geqslant 0,t\geqslant\mu(x)\\ u(x,\mu(x))=(R_{p-2}\varphi)_1(x)\\ u_t(x,\mu(x))=(R_{p-4}\varphi)_2(x)\\ u_x(0,t)-\sigma\dfrac{(p-3)(p-7)}{(p-1)(p-5)}u(0,t)=0\end{cases}\tag{3}$$

的解，则$W(x,t)=Y^4u(x,t)$是问题(1)的解。

引理3 若$p\neq 1,3$，函数$W(-x,t)$是问题

$$\begin{cases} L_{p-4}W(-x,t)=0, x\geqslant 0, t\geqslant \mu(x) \\ W(-x,\mu(x))=\psi_3(-x) \\ W_t(-x,\mu(x))=\psi_4(-x) \\ W_x(0,t)+\sigma\dfrac{p-3}{p-1}W(0,t)=0 \end{cases} \tag{4}$$

的解，则 $u(x,t)=Y^2W(-x,t)$ 是问题(1)的解，其中 $\psi_3(-x)=\psi_1(x)$，$\psi_4(-x)=\psi_2(x)$.

引理4　若 $p\neq -1,-3$，函数 $u(x,t)$ 是问题

$$\begin{cases} L_{p+4}u=0,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant \mu(x) \\ u(x,\mu(x))=0,\ u_t(x,\mu(x))=0 \\ u_x(0,t)-\sigma\dfrac{p+3}{p+1}u(0,t)=0 \end{cases} \tag{5}$$

的解，则 $v(x,t)=X^2u(x,t)$ 是问题

$$\begin{cases} L_p v=0,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant \mu(x) \\ v(x,\mu(x))=0,\ v_t(x,\mu(x))=0 \\ v_x(0,t)-\sigma v(0,t)=0 \end{cases} \tag{6}$$

的解。

2　定理的证明

第一部分，证明问题(1)解的存在性。按 $p<0$ 和 $p\geqslant 0$ 两种情形讨论之。

首先讨论 $p<0$ 的情形。

对于任给的 $\varepsilon>0$，设 $u_\varepsilon(x,t)$ 是下述严格双曲方程广义混合问题

$$\begin{cases} L_{p,\varepsilon}u_\varepsilon=u_{\varepsilon xx}-(x^2+\varepsilon)u_{\varepsilon tt}+pu_{\varepsilon t}=0, x\geqslant 0, t\geqslant \mu(x) \\ u_\varepsilon(x,\mu(x))=\varphi_1(x), u_{\varepsilon t}(x,\mu(x))=\varphi_2(x) \\ u_{\varepsilon t}(0,t)-\sigma u_\varepsilon(0,t)=0 \end{cases} \tag{7}$$

的解。

又设 $x_0>0$ 是初始曲线上任一点的横坐标，过点 $(x_0,\mu(x_0))$ 作曲线 Γ：

$$t=-\frac{x^2}{2}+\frac{x_0{}^2}{2}+\mu(x_0)$$

它和 t 轴的交点为 $(0,T)$. Γ 与 t 轴及初值支柱 $t=\mu(x)$ 所围成的区域为 D，过点 $(x_0,\mu(x_0))$ 作特征线 l_1：

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx}=-\sqrt{x^2+\varepsilon} \\ t(x_0)=\mu(x_0) \end{cases}$$

记特征线 l_1，直线 $t=T$，t 轴与初值支柱 $t=\mu(x)$ 所围成的区域为 D_ε. 显然，$D_\varepsilon\supset D$.

对任意 $t_0\in[0,T]$，作直线 $t=t_0$ 与 D_ε 的边界 l_1 相交交点的横坐标为 x_1. 由所设条件知 $x_0>x_1$.

记　$\Omega_{t_0}=\{(x,t)\,|\,t\leqslant t_0\}\cap D_\varepsilon$

利用能量积分法，可得估计式

$$\frac{1}{2}\int_0^{x_1}[u_{\varepsilon x}^2 + (x^2+\varepsilon)u_{\varepsilon t}^2]\mathrm{d}x + \frac{\sigma}{2}u_\varepsilon^2(0,t_0) - p\iint\limits_{\Omega_{t_0}} u_{\varepsilon t}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^{x_0}[\varphi'_1{}^2 + (x^2+\varepsilon-\mu'^2)\varphi_2^2]\mathrm{d}x \tag{8}$$

由估计式(8)知,成立不等式

$$\| u_\varepsilon \|_{H^1(D)} \leqslant C_1$$

其中 C_1 是与 ε 无关的常数。

我们只要注意到 $u_\varepsilon(x,t)$ 对 t 的各阶微商满足同一方程和类似的初始数据及边界条件,又由于 $x=0$ 为 $\varphi_1(x)$,$\varphi_2(x)$ 及 $\mu(x)$ 的无穷阶零点,所以这些数据的绝对值均有与 ε 无关的上界,因而对任意的正整数 m,类似地成立不等式

$$\| u_\varepsilon \|_{H^m(D)} \leqslant C_m$$

其中 C_m 是与 ε 无关的常数。

由上述可知,存在 $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ 的收敛子序列 $\{u_{\varepsilon_j}(x,t)\}$,其极限函数 $u(x,t)\in C^\infty(D)$ 是问题(1)在区域 D 上的解。

再由 x_0 的任意性,知 $u(x,t)$ 即为所求的解。并由估计式(8)知,问题(1)的解是唯一的。

其次讨论 $p\geqslant 0$ 的情形。

当 $p<4, p\neq 1,3, \dfrac{p-3}{p-1}>0$ 时,由以上讨论知,问题(2)存在 C^∞ 解,于是由引理1知问题(1)存在 C^∞ 解,即当 $p<1$ 或 $3<p<4$ 时,问题(1)存在 C^∞ 解,反复利用引理1和引理2,即得,当 $p\neq 1,3,5,\cdots,2k+1,\cdots$ 及 $p<1, 3<p<5,\cdots,4k+3<p<4(k+1)+1,\cdots$ 时,问题(1)存在 C^∞ 解。

现研究当 $1<p<3$ 时,问题(1)的 C^∞ 解的存在性。

易见,此时问题(4)存在 C^∞ 解,这是因为对 $W(-x,t)$ 而言,实际上问题(4)是问题(1)所考虑区域关于 t 轴在 (x,t) 平面上第二象限的对称区域上的广义混合问题。因此,问题(4)符合通常具有第三类边界条件的混合问题的提法。完全类似于问题(1),在 $p<0$ 时解的存在性的证明,推知问题(4)存在 C^∞ 解。所以,由引理3,当 $1<p<3$ 时,问题(1)存在 C^∞ 解,反复利用引理3,可以得 $5<p<7, 9<p<11,\cdots,4k+1<p<4k+3,\cdots$ 时,问题存在 C^∞ 解。

现证明当 $p=1,3,5,\cdots$ 时,问题(1)存在 C^∞ 解。

首先讨论 $p=1$ 的情形,即考虑定解问题:

$$\begin{cases} L_1u = u_{xx} - x^2u_{tt} + u_t = 0, x\geqslant 0, t\geqslant \mu(x) \\ u(x,\mu(x)) = \varphi_1(x), u_t(x,\mu(x)) = \varphi_2(x) \\ u_x(0,t) - \sigma u(0,t) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

因为

$$L_1u = YXu$$

令 $v = Xu$,则成立下列关系

$$\begin{cases} Yv = 0 \\ v(x,\mu(x)) = (Xu)_{t=\mu(x)} = (R_1\varphi)_1(x) \equiv f(x) \end{cases} \tag{10}$$

积分(10)中的方程,得通解为

$$v(x,t)=\Phi(2t+x^2)$$

因为

$$v(x,\mu(x))=\Phi(2\mu(x)+x^2)\equiv f(x)$$

故 Φ 可由 f 唯一确定为 Φ^*. 这样 $u(x,t)$ 应满足

$$\begin{cases} Xu=\Phi^*(2t+x^2), x\geqslant 0, \mu\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}x^2 \\ u(x,\mu(x))=\varphi_1(x) \end{cases} \tag{11}$$

及

$$\begin{cases} Xu=\Phi^*(2t+x^2), x\geqslant 0, t\geqslant \frac{x^2}{2} \\ u_x(0,t)-\sigma u(0,t)=0 \end{cases} \tag{12}$$

解之,得

$$u(x,t)=\begin{cases} \varphi_1(x_0(x,t))+\int_{x_0(x,t)}^{x}\Phi^*(2(t-\xi^2)-x^2)\mathrm{d}\xi, x\geqslant 0, \mu(x)\leqslant t\leqslant \frac{x^2}{2} \\ \frac{1}{\sigma}\Phi^*(2t-x^2)+\int_0^x\Phi^*(2(t+\xi^2)-x^2)\mathrm{d}\xi\ x\geqslant 0, t\geqslant \frac{x^2}{2} \end{cases} \tag{13}$$

这里 $x_0(x,t)$ 为方程 $\mu(x_0)=\frac{1}{2}x_0^2-\frac{x^2}{2}+t$ 的解。在定理所设条件下,易于验证(13)式所给出的 $u(x,t)$ 是问题(1)的 C^∞ 解。

进而讨论 $p=3$ 的情形。即考虑定解问题:

$$\begin{cases} L_3u=0,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant \mu(x) \\ u(x,\mu(x))=\varphi_1(x), u_t(x,\mu(x))=\varphi_2(x) \\ u_x(0,t)-\sigma u(0,t)=0 \end{cases} \tag{14}$$

由 $L_3u=0$,推知

$$XL_3u=L_1Xu=YX^2u=0$$

令 $v=X^2u$, 则成立下列关系

$$\begin{cases} Yv=0,\quad x\geqslant 0,\ t\geqslant \mu(x) \\ v(x,\mu(x))=(X^2u)|_{t=\mu(x)}=(A_1A_3\varphi)(x)\equiv f_1(x) \end{cases} \tag{15}$$

积分(15)的方程,得通解为

$$v(x,t)=\Phi_1(2t+x^2)$$

因为

$$v(x,\mu(x))=\Phi_1(2\mu(x)+x^2)\equiv f_1(x)$$

故 Φ 可由 f_1 唯一确定为 Φ_1^*. 再令 $u_1=Xu$,则成立关系式

$$\begin{cases} Xu_1=\Phi_1^*(2t+x^2), x\geqslant 0, \mu(x)\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}x^2 \\ u_1(x,\mu(x))=(Xu)|_{t=\mu(x)}=(A_3\varphi)_1(x) \end{cases} \tag{16}$$

及

$$\begin{cases} Xu_1=\Phi_1^*(2t+x^2), x\geqslant 0, t\geqslant \frac{x^2}{2} \\ u_{1x}(0,t)+\frac{2}{\sigma}u_{1t}(0,t)=0 \end{cases} \tag{17}$$

解定解问题(16)和(17),得解的表达式

$$u_1(x,t)=\begin{cases}(A_3\varphi)_1(x_0(x,t))+\int_{x_0(x,t)}^{x}\Phi_1^*(2(t+\xi^2)-x^2)\mathrm{d}\xi\equiv f_2(x),\\ \qquad\qquad x\geqslant 0,\mu(x)\leqslant t\leqslant\dfrac{x^2}{2}\\ \int_0^x\Phi^*(2(t+\xi^2)-x^2)\mathrm{d}\xi-\dfrac{\sigma}{2}\int_0^{t-\frac{x^2}{2}}\Phi_1^*(2\tau)\mathrm{d}\tau\equiv f_3(x,t),x\geqslant 0,t\geqslant\dfrac{x^2}{2}\end{cases}\tag{18}$$

于是,$u(x,t)$ 就可由下列定解问题:

$$\begin{cases}Xu=f_2(x,t),\ x\geqslant 0,\ \mu(x)\leqslant t\leqslant\dfrac{x^2}{2}\\ u(x,\mu(x))=\varphi_1(x)\end{cases}\tag{19}$$

及

$$\begin{cases}Xu=f_3(x,t),\ x\geqslant 0,\ t\geqslant\dfrac{x^2}{2}\\ u_x(0,t)-\sigma u(0,t)=0\end{cases}\tag{20}$$

决定。

由于定解问题(19),(20)与定解问题(11),(12)完全类似,从而可以定出 $u(x,t)$. 在 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\mu(x)$ 所设条件下,上面所求出的 $u(x,t)$ 确实为问题(1)的 C^∞ 解,且由求解过程,知问题(14)的解是唯一的。

至此,我们证明了问题(1),当 $p=1,3$ 时 C^∞ 解的存在性和唯一性。

由于定解问题:

$$\begin{cases}L_1u=0,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant\mu(x)\\ u(x,\mu(x))=\psi_1(x),u_t(x,\mu(x))=\psi_2(x)\\ u_x(0,t)-\dfrac{\sigma}{2}u(0,t)=0\end{cases}\tag{21}$$

存在 C^∞ 解,其中 $\psi_1(x),\psi_2(x)$ 同定解问题(2). 而当 $p=5$ 时,定解问题(2)即为定解问题(21),故由引理1知,问题(1)在 $p=5$ 时,存在 C^∞ 解。

如上反复利用引理1知,当 $p=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 时问题(1)存在 C^∞ 解。

综上所述,对一切实数 p,定解问题(1)存在 C^∞ 解。

第二部分,证明定解问题(1)解的唯一性。

当 $p<0$ 及 $p=1,3$ 时,定解问题(1)解的唯一性,前面已证过。对其它的 p 值只要反复利用引理4,即得定解问题(1)解是唯一的,这样对一切实数 p,定解问题(1)解的唯一性得证。

定理证毕。

参考文献

1 Treves F. Discrete Phenomenon in Uniqeness in the Cauchy Problem, Proc, Amre. Math. sos. 1874,46:229～233

2 王光寅等. 始值问题的存在性中的离散现象. 中国科学,1978,8:752～758

3 王传芳. 一个重特征方程混合问题的离散现象. 科学通报,1981,2:127

4 成凤旸,蔡日增. 广义混合问题中的离散现象. 无锡轻工业学院学报,1983,(3)

A Study About Generalized Mixed Problem in the Multi-Characteristic Equation

Cai Rizeng

(Dept. of General Education)

Abstract The generalized mixed problem in the multi-characteristic equation $u_{xx} - x^2 u_{tt} + pu_t = 0$ is discussed with the initial value condition given based on the Curve $t = \mu(x)$. It has been proved that for all real value p, the generalized mixed problem has unique solution.

Subject-words Multi-charcteristic equation; Generalized mixed prohlem; Discrete phenomenon